Cadre : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$.

I Formes quadratiques réelles

1) Formes bilinéaires symétriques

Définition 1. Une forme bilinéaire est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ qui est linéaire par rapport à ses deux variables.

Exemple 2. *Si α et β sont des formes linéaires, $(x,y) \mapsto \alpha(x)\beta(y)$ est une forme bilinéaire.*

Définition 3. Une forme bilinéaire φ est symétrique si, pour tous $x, y \in E$, on a $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

Exemple 4. *$(A,B) \mapsto \operatorname{tr}(AB)$ et $(f,g) \mapsto \int_{\mathbb{R}} fg\,dx$ sont symétriques.*

Définition 5. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On définit la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ par $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Proposition 6. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors φ est symétrique si, et seulement si, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.*

Proposition 7. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E, identifié à $\mathbb{R}^n$. Alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $\varphi(x,y) = {}^t x \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) y$.*

Proposition 8. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = P^{-1} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) P$.*

Définition 9. On considère l'application suivante :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^\star \\ y & \longmapsto & \varphi(.,y) \end{array} \right.$$

On pose $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\Phi$ que l'on appelle noyau de φ, et $\operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg}\Phi$ que l'on appelle rang de φ.

Proposition 10. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))$ et $\operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))$. On a donc $\dim E = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{rg}\varphi$.*

Définition 11. On dit que φ est non dégénérée lorsque $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.

2) Formes quadratiques

Définition 12. Une forme quadratique est une application de la forme :

$$q : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x,x) \end{array} \right.$$

où φ est une forme bilinéaire symétrique.

Proposition 13. *Pour toute forme quadratique sur E, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ_q sur E telle que, pour tout $x \in E$, on a $q(x) = \varphi_q(x,x)$. On appelle φ_q la forme polaire de q, et on a :*

$$\forall\, x, y \in E,\ \varphi_q(x,y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$$

Exemple 14. *Si $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace pré-hilbertien, alors l'application $x \mapsto \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ est une forme quadratique.*

Exemple 15. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^2$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $h \mapsto D^2_x f(h,h)$ est une forme quadratique.*

Définition 16. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On définit la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$, son rang et son noyau comme la matrice, le rang et le noyau de sa forme polaire.

Proposition 17. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E identifié à $\mathbb{K}^n$. Alors toute forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$ est un polynôme homogène de degré 2 en ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.*

Exemple 18. *Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :*

$$q : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2 - y^2 - xy + yz \end{array} \right. \Rightarrow\ Mat_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 19. *Si q est une forme quadratique positive sur E, alors, pour tous $x, y \in E$, on a $|\varphi_q(x,y)|^2 \leqslant q(x)q(y)$.*

Définition 20. Soit q est une forme quadratique sur E. On dit que deux éléments x et y de E sont orthogonaux si $\varphi_q(x,y) = 0$. Pour $A \subseteq E$, on note $A^\perp = \{y \in E \,|\, \forall\, x \in A,\ \varphi_q(x,y) = 0\}$ l'orthogonal de A.

Remarque 21. *On a $\operatorname{Ker} q = E^\perp$ et $A \subseteq A^{\perp\perp}$.*

Proposition 22. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \operatorname{Ker} q)$$

Si q est non dégénérée, alors $E = F \oplus F^\perp$ et $F = F^{\perp\perp}$.

II Réduction des formes quadratiques

Soit q une forme quadratique sur E de rang r.

1) Réduction de Gauss

Théorème 23 (Gauss)**.** *Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}^\star$ et $\ell_1, \dots, \ell_r$ des formes linéaires indépendantes tels que, pour tout $x \in E$, $q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \ell_i(x)^2$.*

Corollaire 24. *Avec les notations du théorème précédent, la forme polaire de q est $(x,y) \mapsto \sum_{i=1}^r \lambda_i \ell_i(x)\ell_i(y)$.*

Exemple 25. $q(x,y,z) = xy + xz + yz = \left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 - z^2$

Corollaire 26. *Il existe une base orthogonale pour q. La matrice de q dans cette base est alors $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $\lambda_i = 0$ pour $i > r$.*

Corollaire 27. *On note :*

$$s = \mathrm{Card}\left(\{i \in [\![1,n]\!] \mid \lambda_i > 0\}\right) \quad \textit{et} \quad t = \mathrm{Card}\left(\{i \in [\![1,n]\!] \mid \lambda_i < 0\}\right)$$

Alors la matrice de q dans une certaine base est $\mathrm{Diag}(I_s, -I_t, O_{n-s-t})$.

2) Signature d'une forme quadratique

Proposition 28 (Loi d'inertie de Sylvester)**.**

(i) s et t ne dépendent pas de la décomposition de Gauss choisie, et :

$$s = \max\{\dim F \mid F \in \mathcal{P}\} \quad \textit{et} \quad t = \max\{\dim F \mid F \in \mathcal{N}\}$$

où $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{N}$) désigne l'ensemble des sous-espaces de E sur lesquels la restriction de q est définie positive (resp. négative).

(ii) Soit $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base orthogonale pour q. Alors s est le nombre de i tels que $q(e_i) > 0$ et t est le nombre de i tels que $q(e_i) < 0$.

Définition 29. (s,t) s'appelle la signature de q.

Exemple 30. *La signature de $M \mapsto \mathrm{tr}(M^2)$ est $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$.*

Corollaire 31. *Il existe $\ell_1, \dots, \ell_r$ des formes linéaires indépendantes tels que, pour tout $x \in E$, $q(x) = \sum_{i=1}^s \ell_i(x)^2 - \sum_{i=s+1}^r \ell_i(x)^2$.*

Corollaire 32. *Pour $A \in \mathcal{M}_[(n)]\mathbb{R}$, il existe s, t uniques et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que ${}^{\mathrm{t}}PAP = \mathrm{Diag}(I_s, -I_t, O_{n-s-t})$.*

Théorème 33. *Soient q et q' deux formes quadratiques, avec q définie positive. Il existe une base orthonormée pour q et orthogonale pour q'.*

3) Applications

Application 34 (Ellipsoïde de John-Loewner)**.** *Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$, alors il existe un unique ellipsoïde de centre 0 et de volume minimal contenant K.*

Théorème 35 (Lemme de Morse)**.** *Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, telle que $df_0 = 0$ et $d^2 f_0$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, liés par un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : x \mapsto u$, avec $\varphi(0) = 0$ et :*

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2 = \sum_{i=1}^p u_i^2 - \sum_{i=p+1}^n u_i^2$$

III Application à l'étude des coniques

On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ associé à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1) Définitions et premières propriétés

Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire φ.

Définition 36. Une fonction polynômiale de degré 2 sur $\mathcal{E}$ est une application $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe un point $O \in \mathcal{E}$, une forme quadratique non nulle q sur E, une forme linéaire L_0 sur E et une constante $c_O \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall M \in \mathcal{E},\ f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_O(\overrightarrow{OM}) + c_O$.

Remarque 37. *q ne dépend pas du point d'origine O choisi.*

Définition 38. On appelle quadrique affine la classe d'équivalence d'une fonction polynômiale de degré 2 $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ sous la relation "$f \sim g$ si, et seulement si, g est un multiple scalaire de f". Une quadrique plane est appelée conique. L'ensemble des points de E vérifiant $f(M) = 0$ est l'image de la quadrique.

Remarque 39. *Les équations $x^2 + y^2 + 1 = 0$ et $x^2 + 1 = 0$ définissent le même ensemble de points du plan $\mathbb{R}^2$.*

Définition 40. La quadrique définie par $f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L(\overrightarrow{OM}) + c$ est dite propre si la forme quadratique $Q(x, y, z) = q(x, y) + L(x, y)z + cz^2$ définie sur $E \times \mathbb{R}$ est non dégénérée. Cette forme quadratique est dite homogénéisée de q.

Exemple 41. *Les coniques propres sont de "vraies" coniques.*

Définition 42. On dit qu'un point $\Omega \in \mathcal{E}$ est un centre pour la quadrique si $L_\Omega = 0$. Quand il y a un centre unique, on dit que la quadrique est une quadrique à centre.

Proposition 43. *$\mathcal{C}$ est à centre si, et seulement si, q est non dégénérée.*

Exemple 44. *$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ définit une conique à centre, $f(x, y) = x^2 - y$ définit une conique propre mais pas à centre.*

Remarque 45. *On place dans un repère centré en O. On a en fait $df_M(x) = 2\varphi(\overrightarrow{OM}, x) + L(x)$. De plus, $df_M(x) = 0$ pour tout $x \in E$ est équivalent à $\frac{\partial f}{\partial x_1}(M) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(M) = 0$. Si la quadrique est à centre, il y a une solution unique. Sinon le système n'est pas de Kramer, il y a une infinité de solutions, mais il n'y a pas de centre.*

2) Classification des coniques

Proposition 46 (Classification des coniques propres)**.**

sgn(Q)	*sgn(q)*	*Classe*	*Exemple*
$(3,0)$ *ou* $(0,3)$	$(2,0)$ *ou* $(0,2)$	$\varnothing$	$x^2 + y^2 = -1$
$(2,1)$ *ou* $(1,2)$	$(2,0)$ *ou* $(0,2)$	*Ellipse*	$x^2 + y^2 = 1$
$(2,1)$ *ou* $(1,2)$	$(1,1)$	*Hyperbole*	$x^2 - y^2 = 1$
$(2,1)$ *ou* $(1,2)$	$(1,0)$ *ou* $(0,1)$	*Parabole*	$x^2 + y = 0$

Proposition 47 (Classification des coniques impropres)**.**

sgn(Q)	*sgn(q)*	*Classe*	*Exemple*
$(2,0)$ *ou* $(0,2)$	$(2,0)$ *ou* $(0,2)$	*Point*	$x^2 + y^2 = 0$
$(2,0)$ *ou* $(0,2)$	$(1,0)$ *ou* $(0,1)$	$\varnothing$	$x^2 = -1$
$(1,1)$	$(1,1)$	*Droites sécantes*	$x^2 - y^2 = 0$
$(1,1)$	$(1,0)$ *ou* $(0,1)$	*Droites parallèles*	$x^2 = 1$
$(1,0)$ *ou* $(0,1)$	$(1,0)$ *ou* $(0,1)$	*Droite double*	$x^2 = 0$

3) Point de vue géométrique

On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$.

Théorème 48. *Pour toute conique propre d'image non vide qui n'est pas un cercle, il existe un point F appelé foyer, une droite D ne contenant pas F, appelée directrice et un nombre réel positif e appelé excentricité tels que la conique soit l'ensemble des points M tels que $FM = e \times d(M, D)$. Si $e < 1$, $\mathcal{C}$ est une ellipse. Si $e = 1$, $\mathcal{C}$ est une parabole. Si $e > 1$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole.*

Proposition 49. *Une ellipse de foyers F et F' est l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$, pour un certain réel positif a tel que $2a > FF'$. Une hyperbole de foyers F et F' est l'ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$, pour un certain réel positif a tel que $2a < FF'$.*

Développements

- Ellipsoïde de John-Loewner (34) [FGN13c]
- Lemme de Morse (35) [Rou15]

Références

[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses
[Rom20] J.-E. Rombaldi. *Algèbre et Géométrie.* DeBoeck
[Aud06] M. Audin. *Géométrie.* EDP Sciences
[FGN13c] S. Francinou, H. Gianella, et S. Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 3.* Cassini
[Rou15] F. Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel.* Cassini